Краткие сообщения ОИЯИ №7-85   JINR Rapid Communications No. 7-85
УДК 539.12.01:539.184.2

РЕНОРМГРУППОВОЙ РАСЧЕТ НЕКОТОРЫХ ВКЛАДОВ В СВЕРХТОНКОЕ РАСЩЕПЛЕНИЕ ОСНОВНОГО УРОВНЯ МЮОНИЯ

В.В.Старшенко*, Р.Н.Фаустов

В работе рассмотрен вклад слагаемых, зависящих от логарифма отношения масс мюона и электрона, в сверхтонкое расщепление основного уровня в мюонии. Для диаграмм, содержащих радиационные поправки к фотонным линиям, эти слагаемые вычислены из условия инвариантности величины сверхтонкого расщепления относительно выбора схемы перенормировки фотонного пропагатора.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Renormalization Group Calculation of Some Contributions to Hyperfine Splitting of the Ground Level in Muonium

V.V.Starshenko, R.N.Faustov

The paper deals with the contribution of the terms, depending on logarithm of muon and electron masses ratio, to the hyperfine splitting of the ground level in muonium. In the case of diagrams with radiation corrections to photon lines these terms are calculated on the basis of hyperfine splitting invariance under choice of renormalization scheme for photon propagator.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Рассчитанная на основе квантовой электродинамики величина сверхтонкого расщепления основного уровня в мюонии содержит слагаемые, зависящие от логарифма отношения масс мюона и электрона. Для вычисления некоторых из них может быть использован метод ренормгруппы. В работе /1/ при помощи данного метода был исследован вклад слагаемых, зависящих от логарифма отношения масс, в величину аномального магнитного момента мюона. Основой для этого послужило полученное в /2/ уравнение для фотонного пропагатора, спра-

---

* Московский государственный университет

ведливое в пределе $m_e/m_\mu \to 0$, где m_e и m_μ — массы электрона и мюона соответственно. Однако вычислить таким способом вклад членов, содержащих $\ln(m_\mu/m_e)$, в сверхтонкое расщепление основного уровня в мюонии оказывается невозможным, так как они принадлежат к числу радиационных поправок на отдачу и исчезают в пределе $m_e/m_\mu \to 0$. Мы в данной работе используем несколько иной подход к проблеме ренормгрупповой инвариантности, предложенный в /3/.

Рассмотрим следующую схему перенормировок (СП) в квантовой электродинамике. Константа перенормировки фотонного пропагатора вычисляется по модифицированной схеме минимального вычитания /4/, а остальные константы перенормировки определяются как в обычной схеме вычитания на массовой поверхности. При этом фотонный пропагатор зависит от произвольного параметра μ, имеющего размерность массы, и значение $\mu = m_e$ соответствует схеме вычитания на массовой поверхности (см. /5/). Таким образом, мы определили набор СП, обладающий следующими особенностями:

схема вычитания на массовой поверхности принадлежит данному набору;

в следующем после ведущего порядке СП может быть параметризована величиной μ/m_e;

перенормированная масса не зависит от μ и равна физической массе;

зависимость константы связи от μ описывается β-функцией с коэффициентами, не зависящими от массы /6/. Пусть a — бегущая константа связи (для схемы вычитания на массовой поверхности $a = \alpha/\pi$). Тогда зависимость a от μ описывается уравнением

$$\mu \frac{\partial a}{\partial \mu} = \beta(a) = \beta_0 a^2 + \beta_1 a^3 + \dots, \qquad (1)$$

где коэффициенты $\beta_0 = 2/3$ и $\beta_1 = 1/2$ не зависят от выбора СП. Для переменной $\tau = -\beta_0 \ln(\mu/\Lambda)$ имеем $\partial a/\partial \tau = -a^2(1 + \beta_1 a/\beta_0 + \dots)$, где масштабный параметр Λ определяется обычным образом (см., например, /6/). Мы обрываем ряд для β-функции на втором слагаемом и в дальнейшем вместо принятого в этом случае обозначения $a^{(2)}$ будем писать просто a.

Рассмотрим физическую величину R, вычисляемую по теории возмущений с помощью СП из определенного выше набора. Так как значение R не зависит от выбора СП, должно выполняться следующее условие:

$$\partial R/\partial \tau = 0. \qquad (2)$$

Для величины $R^{(2)} = r_0 a(1 + r_1 a)$, являющейся приближением второго порядка для R, получаем

$$\frac{\partial R^{(2)}}{\partial \tau} = 0(a^3),$$

откуда

$$\frac{\partial r_0}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial r_1}{\partial \tau} = 1. \tag{3}$$

Мы видим, что r_0 не зависит от выбора СП, а $r_1 = \tau + \rho_1$, где константа ρ_1 вычисляется, если известно значение r_1 для какой-либо СП.

На основании условия (2) мы можем сделать некоторые оценки следующего (третьего) члена ряда теории возмущений. Зависимость этого слагаемого от τ должна быть устроена таким образом, чтобы скомпенсировать зависимость $R^{(2)}$ от τ с точностью до a^4. Мы рассмотрим величину $\Omega^{(2)}(r_1, \tau)$, определяемую следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(R^{(2)} + \Omega^{(2)} a^3) = 0(a^4).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial \Omega^{(2)}}{\partial \tau} = r_0(2r_1 + c), \tag{4}$$

где $c = \beta_1/\beta_0$. Зависимость коэффициента r_1 от τ нам известна. Проинтегрировав (4), получаем

$$\Omega^{(2)} = r_0 r_1(r_1 + c) + \text{const}. \tag{5}$$

Для определения постоянной интегрирования необходимо задать "оптимальную" СП, то есть такую, для которой величина $R^{(2)}$ ближе всего к R. Выбор такой схемы в достаточной степени произволен, однако не все результаты от него зависят (см. ниже). Пусть оптимальная схема задана параметром μ_{opt}. Мы потребуем

$$\Omega^{(2)}(r_1, \tau)|_{\tau=\tau_{opt}} = 0, \tag{6}$$

где $\tau_{opt} = -\beta_0 \ln(\mu_{opt}/\Lambda)$. При этом произведение $a^3\Omega^{(2)}(r_1, \tau)$ описывает изменение $R^{(2)}$ при переходе от исходной СП, заданной параметром τ, к оптимальной. В качестве исходной возьмем схему перенормировки на массовой поверхности, обозначив $r_1 = K_1$ в этом случае. Величина $(\alpha/\pi)^3\Omega^{(2)}(K_1)$ является нашей оценкой следующего члена ряда теории возмущений. Из (5) и (6) получаем

$$\Omega^{(2)}(K_1) = r_0 K_1(K_1 + c) - r_0 r_1^{opt}(r_1^{opt} + c), \tag{7}$$

где $r_1^{opt} = r_1(\tau_{opt})$.

Перейдем к рассмотрению сверхтонкого расщепления основного уровня в мюонии. Ведущий порядок этой величины определяется диаграммой однофотонного обмена и равен $E_F = (8/3)\alpha^4 m_e^2/m_\mu$. Члены, содержащие $\ln(m_\mu/m_e)$, возникают при рассмотрении радиационных поправок на отдачу вследствие интегрирования по импульсной переменной в области $m_e^2 \ll k^2 < m_\mu^2$ /7/, то есть в асимптотической области для вклада электронной поляризации вакуума в фотонный пропагатор. Это обстоятельство и обеспечивает эффективность ренормгрупповых методов расчета таких слагаемых, причем коэффициенты β-функции в (1) мы вычисляем с учетом только электронной петли (мюонная петля при $k^2 < m_\mu^2$ вклада не дает). Для слагаемых, не зависящих от $\ln(m_\mu/m_e)$, ренормгрупповой подход неприменим.

Вклад радиационных поправок на отдачу равен $\Delta E = -E_F R_\mu$, где величина R_μ в низшем приближении вычисляется из диаграмм двухфотонного обмена. В работе /7/ рассмотрены также диаграммы следующего порядка с радиационными поправками к электронной, фотонной линиям или к электронной вершине. Вклад остальных диаграмм этого порядка не зависит от $\ln(m_\mu/m_e)$. Таким образом, для зависящей от $\ln(m_\mu/m_e)$ части величины R_μ известно второе приближение:

$$R_\mu^{(2)} = \frac{3\alpha}{\pi}\frac{m_e}{m_\mu}\ln\frac{m_\mu}{m_e} + \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2\frac{m_e}{m_\mu}\left[2\left(\ln\frac{m_\mu}{m_e}\right)^2 - \frac{31}{12}\ln\frac{m_\mu}{m_e}\right]. \tag{8}$$

С помощью изложенного выше метода оценим следующий член ряда теории возмущений для R_μ. При этом μ_{opt} имеет тот же порядок величины, что и характерный импульс для фотонных пропагаторов. В нашем случае это дает $m_e \ll \mu_{opt} < m_\mu$, причем r_1^{opt} не содержит членов с $\ln(m_\mu/m_e)$. Мы оцениваем вклад диаграмм, получаемых из диаграмм предыдущего порядка, путем учета вклада электронной петли в один из фотонных пропагаторов. Полагая, согласно (8),

$$r_0 = 3\frac{m_e}{m_\mu}\ln\frac{m_\mu}{m_e}, \quad K_1 = \frac{2}{3}\ln\frac{m_\mu}{m_e} - \frac{31}{36},$$

получаем из (7):

$$\Omega^{(2)} = \frac{4}{3}\frac{m_e}{m_\mu}\left(\ln\frac{m_\mu}{m_e}\right)^3 - \frac{35}{18}\frac{m_e}{m_\mu}\left(\ln\frac{m_\mu}{m_e}\right)^2 + A\frac{m_e}{m_\mu}\ln\frac{m_\mu}{m_e}, \tag{9}$$

где $A = \beta_0 \ln\frac{m_\mu}{\mu_{opt}}\left(\frac{35}{36} - \beta_0 \ln\frac{m_\mu}{\mu_{opt}}\right)$.

Коэффициенты при первых двух слагаемых не зависят от выбора μ_{opt} в указанных выше пределах. Это означает, что они полностью определяются из асимптотики фотонного пропагатора, и вклад этих слагаемых в сверхтонкое расщепление является точным результатом для перечисленных выше диаграмм:

$$\Delta E_1 = -\frac{4}{3} E_F \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 \frac{m_e}{m_\mu} \left(\ln \frac{m_\mu}{m_e}\right)^3,$$
$$\Delta E_2 = \frac{35}{18} E_F \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 \frac{m_e}{m_\mu} \left(\ln \frac{m_\mu}{m_e}\right)^2. \tag{10}$$

Величина ΔE_1 была получена в /8/ прямым вычислением. При этом оказалось, что данное слагаемое возникает только за счет радиационных поправок к фотонным пропагаторам в диаграмме двухфотонного обмена.

Значение коэффициента A в (9) зависит от выбора оптимальной схемы и должно рассматриваться как оценка. Для значений μ_{opt}, близких к m_μ, коэффициент A изменяется от $A = 0$ при $\mu_{opt} = m_\mu$ до максимального значения $A = 1225/1728 \approx 0{,}71$ при $\mu_{opt} = 0{,}48 m_\mu$. Это максимальное значение соответствует схеме, получаемой из так называемого принципа минимальной чувствительности /3/. В этой схеме r_{opt} задается условием

$$\frac{\partial R^{(2)}}{\partial r}\bigg|_{r=r_{opt}} = 0,$$

откуда находим μ_{opt} и $r_{opt} = -c/2 + O(a_{opt})$. Таким образом, для вклада в сверхтонкое расщепление слагаемого, линейного по $\ln(m_\mu/m_e)$, справедлива следующая оценка: $0 < -\Delta E_3 < 1$ кГц. Из (10) получаем

$$\Delta E_1 = -0{,}055 \text{ кГц}, \qquad \Delta E_2 = 0{,}015 \text{ кГц}. \tag{11}$$

Данные величины имеют тот же порядок, что и вклад слабого взаимодействия /9/. Погрешность экспериментальных данных составляет $\sim 0{,}16$ кГц и будет, возможно, уменьшена в ближайшем будущем. Тогда вклад (11) должен учитываться при сопоставлении теории с экспериментом. Однако некоторые из слагаемых такого же порядка еще не вычислены (см. /7/).

В заключение следует отметить, что данный метод расчета слагаемых, зависящих от $\ln(m_\mu/m_e)$, может быть использован и для расчета аномального магнитного момента мюона. В этом случае коэффициенты при всех степенях логарифма не зависят от выбора оптимальной схемы, и предсказываемые для них значения совпадают с полученными в /1/ на основе ренормгруппового уравнения для фотонного пропагатора. Этим и объясняется правильность оценки вклада диаграмм восьмого порядка в аномальный магнитный момент мюона, выполненной в [10] с помощью принципа минимальной чувствительности.

Авторы выражают благодарность К.Г.Четыркину за обсуждение работы [10], а также М.И.Эйдесу и В.А.Шелюто за ознакомление с результатами их вычислений до публикации.

Литература

1. Lautrup B., de Rafael E. Nucl.Phys., 1974, B70, p.317.
2. Adler S.L. Phys.Rev., 1972, D5, p.3021.
3. Stevenson P.M. Phys.Rev., 1981, D23, p.2916.
4. Bardeen W.A. et al. Phys.Rev., 1978, D18, p.3998.
5. Celmaster W., Sivers D. Phys.Rev., 1981, D23, p.227.
6. Владимиров А.А., Ширков Д.В. УФН, 1979, 129, с.407.
7. Sapirstein J.R., Terray E.A., Yennie D.R. Phys.Rev., 1984, D29, p.2290.
8. Eides M.I., Shelyuto V.A. Phys.Lett., 1984, 143B, p.241.
9. Старшенко В.В., Фаустов Р.Н. Вестн.МГУ, сер.3: Физика, астрон., 1983, 24, №3, с.47.
10. Kubo J., Sakakibara S. Z.Phys., 1982, C14, p.345.

Рукопись поступила 3 апреля 1985 года.